

Modèles électriques du transformateur électromagnétique

Bernard MULTON

Antenne de Bretagne de l'École Normale Supérieure de Cachan

1- Introduction

Le transformateur est un composant fondamental en électrotechnique, son étude constitue l'un des piliers de cette discipline. Rappelons que le transformateur industriel a été inventé par Lucien Gaulard et John-Dixon Gibbs en 1883 [1] et qu'il a eu un rôle décisif dans le développement de l'énergie électrique et plus particulièrement en courant alternatif. Son essor fut immédiat, les puissances réalisées augmentèrent très rapidement (quelques 100 kVA en 1900 et quelques MVA en 1910).

Nous sommes habitués aujourd'hui à utiliser, pour décrire le fonctionnement des transformateurs, des modèles électriques équivalents représentés par leurs équations et par des schémas électriques. Selon la culture des utilisateurs, le modèle électrique équivalent d'un même transformateur peut différer sensiblement. En effet, l'électrotechnicien utilisera plutôt un schéma dans lequel l'inductance magnétisante est saturable et les inductances de fuites réparties au primaire et au secondaire. En revanche, l'électronicien utilisera de préférence un modèle mettant en œuvre les notions d'inductances propres des enroulements et de mutuelle. Cette dernière représentation est également la plus utilisée dans les simulateurs de circuits.

Nous allons montrer, dans cet article, les particularités de ces modèles et leurs équivalences.

2- Brève analyse du transformateur monophasé

2.1- Représentation magnétique

La description du fonctionnement du transformateur est différente selon l'application à laquelle il est destiné ; les deux applications extrêmes sont celles du transformateur de tension fonctionnant généralement en flux forcé (ou quasi-forcé) (tension sinusoïdale ou non) et celle du transformateur de courant alimenté en courant imposé. Malgré un comportement différent, ces deux transformateurs peuvent être représentés par un même schéma équivalent.

La figure 1 montre une représentation schématique d'un transformateur monophasé à deux enroulements. Le circuit magnétique est réalisé avec un matériau à haute perméabilité (quelques $1000 \cdot \mu_0$) mais non infinie. Comme l'air (ou l'huile, les isolants d'une façon générale) dans lequel sont bobinés les enroulements n'a pas une perméabilité nulle, il en résulte qu'il y a des fuites magnétiques. Le schéma

magnétique équivalent de la figure 1 montre, de façon caricaturale, les réluctances du noyau ferromagnétique et de l'air, il apparaît clairement que si les réluctances du fer étaient nulle (perméabilité infinie), il n'y aurait pas de flux ailleurs (φ_{f1} et φ_{f2} nuls).

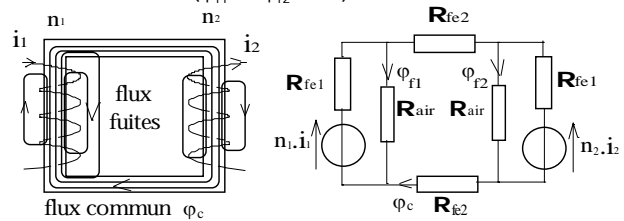


Figure -1-

Représentation d'un circuit magnétique élémentaire et de son schéma magnétique équivalent simplifié (constantes localisées).

S'il n'y avait pas de fuites magnétiques, toutes les spires embrasseraient le même flux commun φ_c . Hors, en réalité, à cause de ces fuites, chacune des spires des enroulements embrasse un flux sensiblement différent des autres. Comme c'est l'aspect global de l'enroulement qui est intéressant lorsqu'on le voit de ses bornes, on ne s'intéresse qu'au flux total de fuites (pour

le primaire : $\varphi_{f1} = \sum_{s=1}^{n_1} \varphi_{f1_s}$) et qu'au flux total commun ($\varphi_{c1} = n_1 \cdot \varphi_c$) de chaque enroulement. Plus le flux de fuites total prend des proportions importantes par rapport au flux commun total moins le couplage est bon.

Ces différents flux correspondent à des énergies magnétiques, le flux commun est associé à l'énergie magnétique principalement stockée dans la partie ferromagnétique et les flux de fuites sont relatifs à l'énergie magnétique stockée dans le milieu amagnétique où se trouvent généralement les bobinages (une partie du flux de fuites circule également en dehors des bobinages, par exemple dans l'enveloppe et à l'extérieur du transformateur).

Précisons bien que les flux de fuites, qui occasionnent des chutes de tension, ne correspondent pas directement à des pertes énergétiques contrairement à ce que laisse penser une expression couramment répandue et à proscrire de « pertes de flux ». Le terme de pertes, sans autre qualificatif, est normalement assimilé à un effet dissipatif énergétique. Cependant, lorsque le flux de fuites varie à haute fréquence (et même à 50 Hz, lorsque les conducteurs ont de fortes sections), il induit des forces électromotrices génératrices de courants de Foucault dans les conducteurs (cuivre ou aluminium) et également dans l'éventuelle enveloppe métallique, il y a alors des pertes associées aux fuites.

On remarquera également sur le schéma magnétique de la figure 1 que, si le circuit magnétique n'est pas saturé (réductances indépendantes du niveau de flux), on ne peut pas vraiment faire de distinction entre les flux de fuites liés au primaire et ceux liés au secondaire. La proportion de l'énergie globale de fuites par rapport à l'énergie stockée dans le noyau reste constante.

2.2- Schéma électrique [2, 3, 4]

Les enroulements possèdent, sauf s'ils sont supraconducteurs, une résistance électrique et l'on peut représenter le schéma électrique comme le montre la figure 2. Les tensions e_1 et e_2 sont les tensions induites liées aux variations de flux :

$$e_1 = n_1 \cdot \frac{d\phi_c}{dt} + \frac{d\phi_{f1}}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = n_2 \cdot \frac{d\phi_c}{dt} + \frac{d\phi_{f2}}{dt}$$

Les tensions aux bornes des enroulements s'expriment par :

$$v_1 = R_1 \cdot i_1 + e_1 \quad \text{et} \quad v_2 = e_2 - R_2 \cdot i_2$$

Les conventions choisies correspondent à celles des sens des enroulements de la figure 1. Il s'agit des conventions les plus fréquemment utilisées en électrotechnique (primaire en récepteur et secondaire en générateur).

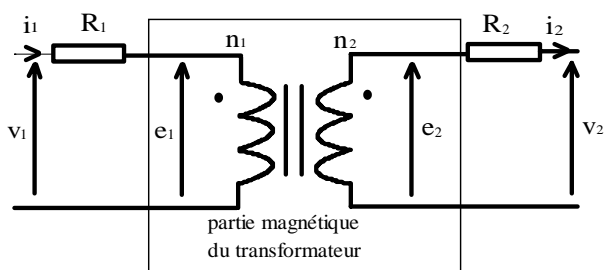


Figure -2-
Schéma électrique et conventions de signe des courants et tensions.

Par la suite, nous allons concentrer notre attention sur la partie magnétique du modèle en tenant à l'écart les effets résistifs.

Précisons que dans le cas des petits dispositifs, les effets résistifs sont généralement importants et que dans les gros dispositifs ce sont les effets inductifs qui l'emportent. D'où les approximations souvent effectuées : on néglige les résistances dans les gros systèmes électromagnétiques et les inductances dans les tout petits. Mais attention à l'importance de la fréquence : dans un petit transformateur de 100 grammes, à 50 Hz les inductances peuvent être négligeables, à 100 kHz, ça ne sera pas le cas !

3- Les modèles électriques et leurs équivalences

3.1- Modèle sans saturation et sans pertes magnétique

Dans le cas de transformateurs fonctionnant à haute fréquence, les niveaux d'induction sont généralement faibles afin de limiter les pertes magnétiques. En conséquence, le matériau magnétique n'est pas saturé, on peut donc utiliser le modèle de la figure 3 dans lequel L_1 et L_2 sont les inductances propres (incluant flux de fuites et flux commun) des enroulements primaire et secondaire et M est l'inductance mutuelle primaire-secondaire. Une remarque doit cependant être faite : même à faible niveau d'induction, les matériaux ferromagnétiques sont souvent assez non linéaires mais ces effets peuvent être négligés.

Comme, on l'a précisé, seule a été représentée la partie magnétique, les résistances ont été écartées.

Les inductances propres et la mutuelle sont des grandeurs physiquement mesurables, par exemple, dans un essai voltampèremétrique à la fréquence de fonctionnement normal (l'effet des résistances des bobinages peut être simplement pris en compte, si cela est nécessaire). Le choix de la fréquence, à laquelle sont effectuées les mesures, a une importance car la perméabilité des matériaux magnétique dépend sensiblement de la fréquence que ce soit dans le cas d'utilisation de tôles ou de matériaux massifs de types ferrite ou poudre de fer.

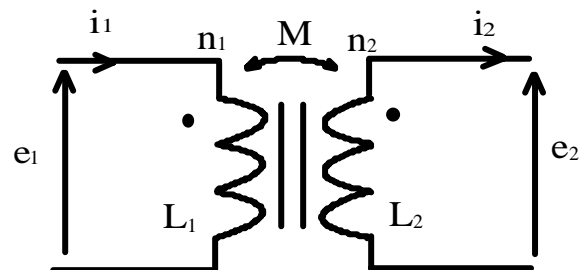


Figure -3-
Schéma électrique sans saturation ni pertes magnétiques.

Les équations magnétiques et électriques sont, au primaire :

$$\phi_1 = L_1 \cdot i_1 - M \cdot i_2 \quad \text{et} \quad e_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (1)$$

au secondaire :

$$\phi_2 = M \cdot i_1 - L_2 \cdot i_2 \quad \text{et} \quad e_2 = M \cdot \frac{di_1}{dt} - L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

La somme des flux est ici possible dans le cadre de l'hypothèse de non saturation du circuit magnétique (application du principe de superposition).

Du point de vue électrique, il est intéressant de disposer de schémas facilement utilisables, le premier que nous proposons est schéma équivalent suivant à

fuites primaires (le double cercle représente un transformateur parfait) :

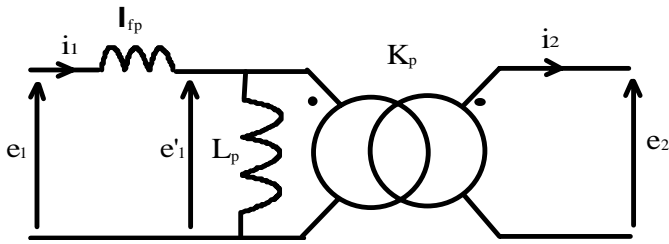


Figure -4-

Schéma électrique sans saturation ni pertes magnétiques, à fuites primaires.

Notons que ce schéma équivalent ne possède que trois paramètres : une **inductance de fuites primaire** I_{fp} , une **inductance magnétisante primaire** L_p et un **rapport de transformation** K_p .

Les équations électriques associées à ce schéma sont :

$$e_1 = I_{fp} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_p \cdot \frac{d(i_1 - K_p \cdot i_2)}{dt}$$

$$e_1 = (L_p + I_{fp}) \cdot \frac{di_1}{dt} - K_p \cdot L_p \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (3)$$

$$e_2 = K_p \cdot e'_1 = K_p \cdot L_p \cdot \frac{d(i_1 - K_p \cdot i_2)}{dt}$$

$$e_2 = K_p \cdot L_p \cdot \frac{di_1}{dt} - K_p^2 \cdot L_p \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (4)$$

En identifiant (3) à (1) et (4) à (2), on peut déterminer les expressions des 3 éléments du schéma équivalent :

$$K_p = \frac{L_2}{M} \quad L_p = \frac{M^2}{L_2} \quad I_{fp} = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_2} \quad (5)$$

Le **coefficient de dispersion de Blondel** σ (inférieur à 1) est défini comme étant le rapport du flux total de fuites sur le flux total global :

$$\sigma = \frac{I_{fp}}{L_1} = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} \quad (6)$$

Pour mémoire, le coefficient d'Hopkinson ν est défini par le rapport du flux totale sur le flux commun, soit ici :

$$\nu = \frac{L_1 + I_{fp}}{L_1} > 1$$

On peut de la même façon établir un schéma à fuites secondaires (figure 5) :

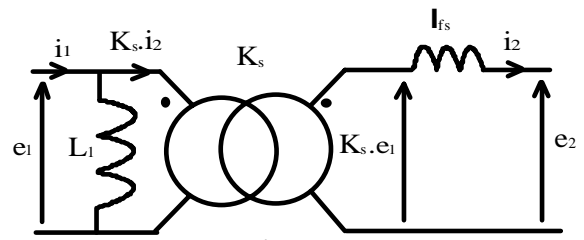


Figure -5-

Schéma électrique sans saturation ni pertes magnétiques, à fuites secondaires.

En reconduisant la même démarche que précédemment, on obtient les résultats suivants :

$$K_s = \frac{M}{L_1} \quad L_1 \quad I_{fs} = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1} \quad (7)$$

On remarquera que le coefficient de dispersion σ est inchangé :

$$\sigma = \frac{I_{fs}}{L_2} = \frac{I_{fs}}{K_s^2 \cdot L_1 + I_{fs}} = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} \quad (8)$$

Mesures

Nous avons signalé que les inductances propres et mutuelles étaient des grandeurs physiquement mesurables. Cependant, les imprécisions de mesure conduisent généralement à des incertitudes importantes sur la valeur de σ . On procède donc plutôt à un essai en court-circuit pour déterminer l'inductance de fuites I_{fp} ou I_{fs} . Une autre méthode, particulièrement pratique car elle ne nécessite pas de réduire la tension d'alimentation, consiste à mesurer l'angle d'empêchement lors de l'alimentation d'un redresseur de courant.

Application à un transformateur à 3 enroulements :

Par un exemple, le transformateur d'une alimentation à découpage forward à enroulement de démagnétisation : seulement 6 paramètres sont mesurables : les inductances propres L_1, L_2 et L_3 des trois enroulements ainsi que les inductances mutuelles $M_{12} = M_{21}, M_{23} = M_{32}$ et $M_{31} = M_{13}$.

Un tel transformateur peut être modélisé par le schéma de la figure 6.

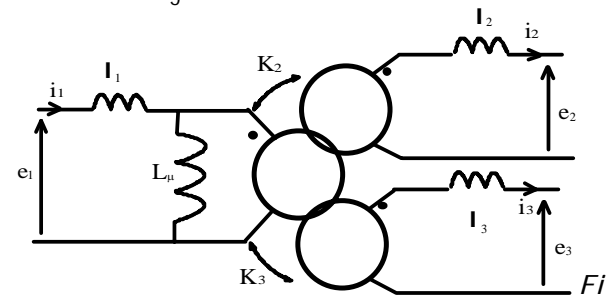


Figure -6-

Schéma électrique sans saturation ni pertes magnétiques d'un transformateur à 3 enroulements (ex. : alimentation forward).

On peut, avec la même méthode que celle décrite précédemment, obtenir les expressions des paramètres du modèle en fonction des inductances mesurables :

$$K_3 = \frac{M_{23}}{M_{12}} \quad K_2 = \frac{M_{23}}{M_{13}} \quad L_\mu = \frac{M_{13} \cdot M_{12}}{M_{23}}$$

$$I_1 = L_1 - \frac{M_{13} \cdot M_{12}}{M_{23}} \quad I_2 = L_2 - \frac{M_{23} \cdot M_{12}}{M_{13}}$$

$$I_3 = L_3 - \frac{M_{23} \cdot M_{13}}{M_{12}}$$

3.2- Modèle avec saturation et sans pertes, équivalences avec les modèles non-saturés

La plupart des transformateurs industriels fonctionnent dans un régime de saturation plus ou moins prononcée. La raison de ce choix de dimensionnement résulte d'un compromis entre le volume de circuit magnétique, les pertes fer et la valeur efficace du courant magnétisant.

Dans ces conditions, on considère, et cela se vérifie expérimentalement, que l'énergie de fuites est principalement localisée dans un milieu non saturable. Par conséquent, les fuites peuvent être modélisées, en première approximation, par une ou des inductances non saturables. En revanche, l'inductance représentant l'énergie liée au flux commun est saturable.

On obtient le schéma bien connu de la figure 7 :

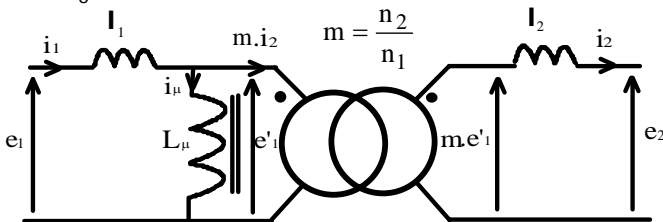


Figure -7-

Schéma électrique du transformateur saturable sans pertes magnétiques.

Cette fois le rapport de transformation est égal au rapport des nombres de spires primaire et secondaire.

L'inductance L_μ est saturable et le courant magnétisant i_μ est lié au flux commun par la caractéristique magnétique du circuit $\phi_c(i_\mu)$ avec :

$$e'_1 = \frac{d\phi_c}{dt}$$

Équivalences avec les schémas en régime non-saturé

On peut, à nouveau, écrire les équations électriques :

$$e_1 = I_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_\mu \cdot \frac{d(i_1 - m \cdot i_2)}{dt}$$

$$e_1 = (L_\mu + I_1) \cdot \frac{di_1}{dt} - m \cdot L_\mu \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (9)$$

$$e_2 = m \cdot e'_1 - I_2 \cdot \frac{di_2}{dt} = m \cdot L_\mu \cdot \frac{di_1}{dt} - (m^2 \cdot L_\mu + I_2) \cdot \frac{di_2}{dt} \quad (10)$$

En identifiant les équations (9) et (10) à (1) et (2), on obtient :

$$L_\mu = \frac{M}{m} \quad I_1 = L_1 - \frac{M}{m} \quad I_2 = L_2 - m \cdot M \quad (11)$$

Les éléments de ce schéma équivalent peuvent être obtenus que si le rapport des nombres de spires est connu (celui-ci ne peut pas être rigoureusement mesuré, il doit être connu lors de la construction).

Lorsque le circuit magnétique est saturé et si l'on souhaite une modélisation fine du comportement du transformateur, il est nécessaire de connaître m , il reste alors à identifier les inductances de fuites non saturables et l'inductance magnétisante saturable : dans ce cas une caractérisation flux-courant est préférable.

Notons que lorsque l'on ramène au primaire ou au secondaire l'ensemble des résistances et des inductances de fuites, tout en conservant, comme rapport de transformation, le rapport m des nombres de spires, on effectue l'approximation de Kapp. Il faut donc bien faire la différence entre les schémas équivalents dérivés de cette approximation (où L_μ est saturable) et les schémas équivalents des figures 4 et 5 dans lesquels K_p et K_s sont sensiblement différents de m .

Le coefficient de dispersion peut être déterminé à partir de l'expression (8) du chapitre 3.1 et en utilisant les équivalences (11) :

$$\sigma = 1 - \frac{L_\mu}{(L_\mu + I_1) \cdot (L_\mu + \frac{I_2}{m^2})}$$

On peut également montrer que les rapports de transformation K_p et K_s des modèles non saturables s'expriment, en fonction des éléments du modèle saturable, par :

$$K_p = m \cdot \left[1 + \frac{I_2}{m^2 \cdot L_\mu} \right] \quad \text{et} \quad K_s = \frac{m}{1 + \frac{I_1}{L_\mu}}$$

En outre, dans le cas où les énergies de fuites primaires et secondaires sont sensiblement égales

($I_1 \cong \frac{I_2}{m^2}$), le facteur de dispersion vaut :

$$\sigma \cong 1 - \frac{1}{\left[1 + \frac{I_1}{L_\mu} \right]^2}$$

Alors on obtient, pour les rapports de transformation K_p et K_s , les expressions simplifiées :

$$K_p = \frac{m}{\sqrt{1-\sigma}} \text{ et } K_s \cong m \cdot \sqrt{1-\sigma}$$

$\sqrt{1-\sigma}$ est appelé coefficient de couplage [4, 5] et noté k , alors d'après (6) :

$$k = \sqrt{1-\sigma} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

On remarque que lorsque les fuites ($\sigma = 0$ et $k = 1$) sont faibles : $K_p \cong K_s \cong m$.

3.2- Prise en compte des pertes magnétiques

Que le circuit magnétique soit saturé ou non, il peut être intéressant de prendre en compte les pertes magnétiques. Celles-ci doivent être représentées par des éléments dissipatifs c'est à dire des résistances.

Les pertes magnétiques localisées dans le « fer » sont directement liées à l'induction donc au flux. Les pertes hystérétiques sont sensiblement proportionnelles à B_M^2 et celles dues aux courants de Foucault sont proportionnelles à B_{eff}^2 . Donc, à forme d'onde d'induction donnée, on peut dire que l'ensemble des pertes fer sont proportionnelle à B_{eff}^2 . Globalement, si le circuit est saturable et qu'il a une section constante, la répartition de l'induction B ne dépend pas du niveau d'excitation magnétique et il existe une relation linéaire entre le flux commun et l'induction dans tout le circuit magnétique. Les pertes sont donc sensiblement proportionnelles au carré du flux.

Pour une forme d'onde de flux et une fréquence données, il existe une relation de proportionnalité entre la valeur efficace de la dérivée du flux et son amplitude ($\varphi_{c\text{Max}} \propto \left[\frac{d\varphi_c}{dt} \right]_{\text{eff}}$).

Alors on peut modéliser les pertes fer par une simple résistance R_{fe} placée aux bornes de l'inductance magnétisante L_{μ} :

$$P_{fe} = \frac{\left[n_1 \cdot \frac{d\varphi_c}{dt} \right]_{\text{eff}}^2}{R_{fe}}$$

Dans le cas où la fréquence varie et où la forme du flux reste constante, une simple résistance ne convient plus à cause des pertes par hystérésis. En effet, la dérivée du flux est proportionnelle à la fréquence donc le carré de sa valeur efficace est proportionnel à f^2 , les pertes par courants de Foucault sont donc bien représentées par une résistance constante ; en revanche, les pertes par hystérésis sont proportionnelles à f , il faudrait pour les représenter à fréquence variable une résistance proportionnelle à la fréquence. Remarquons que cette modélisation décrit bien le comportement, a priori surprenant, que l'on observe à fréquence variable et à tension d'amplitude constante : les pertes croissent lorsque la fréquence diminue (l'induction augmente). Lorsque la section du circuit magnétique n'est pas constante –cas assez fréquent des circuits ferrites– et qu'il y a saturation, la répartition de l'induction change en fonction du niveau d'excitation, alors une résistance constante modélise mal les pertes fer. Mais, il est rare (sauf dans les inductances saturables) que les circuits en ferrite fonctionnent à haute fréquence en régime saturé.

Quant aux pertes magnétiques dans les conducteurs (notés symboliquement cuivre), elles dépendent de la répartition et de l'orientation de l'induction dans le bobinage. Elles peuvent être, en première approximation, représentées par une résistance aux bornes des inductances de fuites. Cette résistance varie avec la fréquence à cause de l'effet pelliculaire généralement prononcé, en son absence, une résistance constante $R_{\text{mag-cu}}$ représenterait convenablement ces pertes.

Le schéma de la figure 8 donne un modèle électrique d'un transformateur avec pertes par effet Joule et pertes magnétiques dans le fer et dans le bobinage.

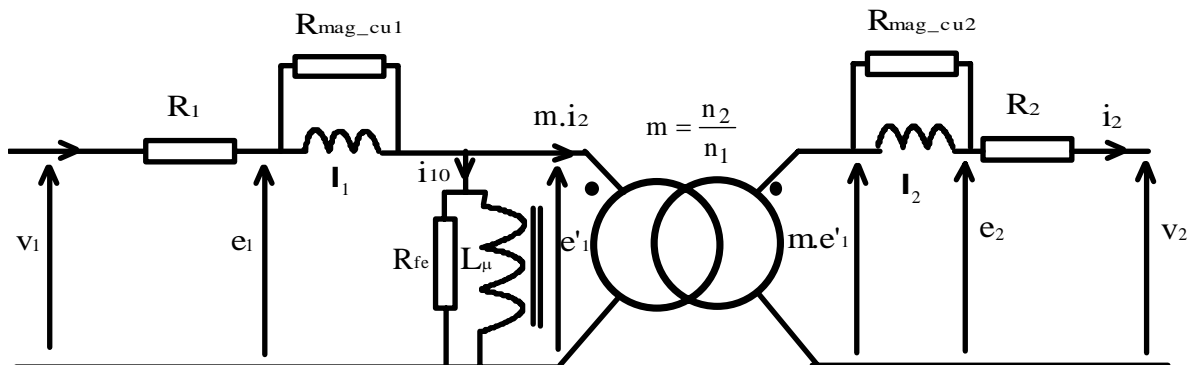


Figure -8-
Schéma électrique du transformateur saturable avec pertes.

La figure 9 montre les formes d'onde du courant à vide (dans R_{fe} et L_{μ}) et du courant secondaire lorsque le transformateur est en régime permanent, alimenté par une source de tension v_1 en créneaux et chargé par une résistance.

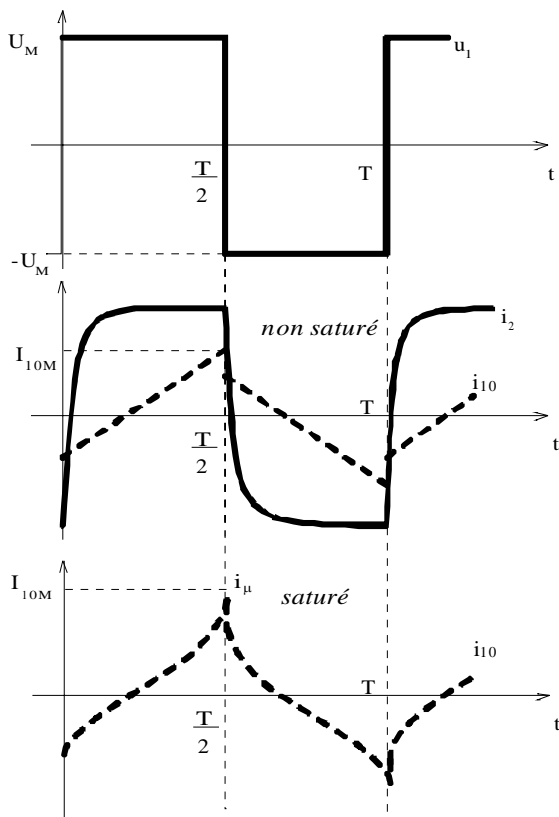


Figure -9-

Formes d'onde dans le cas d'une alimentation en créneaux de tension (en régimes non saturé puis saturé, en bas)

On remarquera que le courant magnétisant i_{10} comprend deux composantes, l'une inductive variant linéairement avec le temps lorsque L_{μ} n'est pas saturable et s'incurvant lorsqu'il y a saturation et l'autre résistive, due aux pertes magnétiques dans le fer, présentant des décrochements que l'on peut observer expérimentalement.

Pour la constitution d'un modèle hautes fréquences, il serait nécessaire de rajouter les capacités équivalentes des bobinages et de couplage primaire-secondaire. Ceci se révèle nécessaire dès que des variations rapides de la tension sont à prendre en compte. C'est ce qui se produit dans les transformateurs industriels lorsqu'il apparaît des coups de foudres, des manoeuvres de contacteurs ou des déclenchements de protections. L'alimentation par convertisseur électronique des transformateurs d'alimentation à découpage génère également des dv/dt importants dont on peut souhaiter modéliser les effets. Enfin, l'analyse des problèmes de compatibilité électromagnétique rend nécessaire la prise en compte de ces capacités principaux vecteurs de propagation des perturbation de mode commun. Nous n'aborderons

pas dans cet article la modélisation des capacités des transformateurs.

4- Conclusion

Cet article avait pour but de rappeler l'origine de la modélisation électrique énergétique du transformateur. Il avait également pour objectif de montrer les relations existantes entre les modèles de type inductances et mutuelle ne prenant pas en compte la saturation et le modèles plus électrotechnique bien adapté aux dispositifs saturables et fonctionnant en régime de saturation.. Ces modèles s'appliquent à des transformateurs fonctionnant dans des contextes très variés : alimentations sinusoïdales ou non, en tension ou en courant...

Enfin, ces modèles ne sont que des modèles, c'est à dire qu'ils ne reflètent qu'une partie de la réalité, nous avons voulu le rappeler tout au long de ce document. La meilleure façon de s'en rendre compte est de garder un œil critique lorsque l'on effectue des mesures, en particulier, devant les oscillogrammes. La tendance de tout un chacun est malheureusement de ne voir que ce qu'il veut voir...

5- Bibliographie

Cette bibliographie est donnée à titre indicatif. Elle est loin d'être exhaustive et permettra de satisfaire les lecteurs désireux d'en savoir plus ou de trouver des points de vue complémentaires de ceux développés ici. Un sujet ne commence à être bien compris que lorsqu'on a pu l'observer sous suffisamment d'angles différents.

- [1] G. RAMUNNI, « La bataille du transformateur électrique », La Recherche n°283, janvier 1996, pp.92-95.
- [2] A. FOUILLÉ, « Électrotechnique à l'usage des ingénieurs, tome 2 : machines électriques à courants alternatifs », Dunod, n^{ème} édition..
- [3] J. CHATELAIN, « Machines électriques » Tome 1, Dunod, ©Presses polytechniques romandes 1983.
- [4] G. SÉQUIER, F. NOTELET, « Électrotechnique industrielle » Techniques et documentation 1980.
- [5] J.P. FERRIEUX, F. FOREST, « Alimentations à découpage, convertisseurs à résonance », Masson, 1987.

Adresse de l'auteur :

Antenne de Bretagne de l'ENS de Cachan,
Campus de Ker Lann - 35170 BRUZ,
email : multon@bretagne.ens-cachan.fr